

Тема: Елементи комбінаторики. Комбінаторні правила суми та добутку

Мета:

- *Навчальна:* пригадати та поглибити знання учнів про множину, комбінаторні правила суми та добутку; розглянути поняття факторіалу числа;
- *Розвиваюча:* розвивати вміння розв'язувати завдання на основі отриманих знань;
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук;

Компетенції:

- Спілкування державною мовою (уміння ставити запитання і розпізнавати проблему; міркувати, робити висновки на основі інформації, поданої в науковій презентації)

Тип уроку: засвоєння нових знань;

Обладнання: опорний конспект, навчальна презентація, мультимедійне обладнання;

Хід уроку

I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Налаштування на роботу

II. Актуалізація опорних знань

**Перед вивченням теми «Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики» доречно пригадати поняття множини.*

Розглянемо знайомі учням нескінченні множини:

- Які існують типи чисел?



Натуральні числа (лат. «natura» - природа)

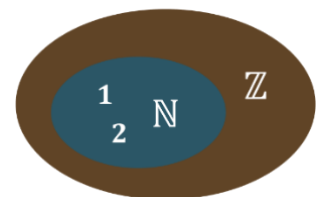
Натуральні числа – числа, що виникають природним чином при лічбі.

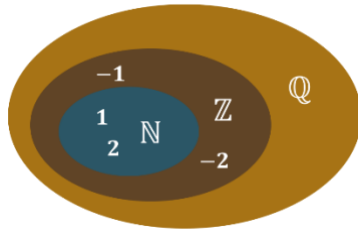
- Наведіть приклади натуральних чисел (1, 2, 3 ...)

Цілі числа

Цілі числа – це натуральні числа, протилежні їм числа і число нуль.

- Наведіть приклади цілих чисел (–2, –1, 0, 1, 2)





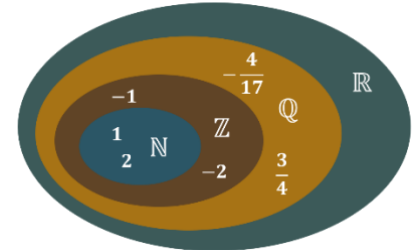
Раціональні числа

Раціональні числа – додатні числа (цілі та дробові), від'ємні числа (цілі та дробові), число нуль.

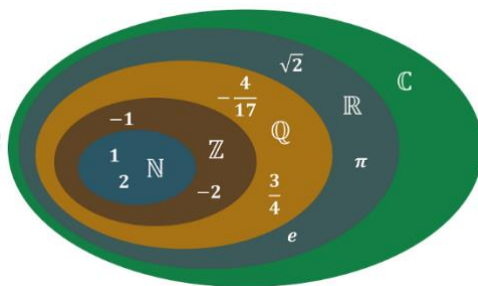
- Наведіть приклади раціональних чисел $(-\frac{4}{17}; \frac{3}{4})$

Дійсні числа

Множина раціональних та ірраціональних чисел (числа, які не можуть бути виражені за допомогою відношення цілих чисел, їх можна виразити за допомогою нескінченних неперіодичних десяткових дробів)



- Наведіть приклади дійсних чисел $(\sqrt{2}, \pi, e)$



Комплексні числа

Комплексні числа можна подати у вигляді як формальну суму $x + iy$, x і y – дійсні числа, i – уявна одиниця ($i = \sqrt{-1}, i^2 = -1$)

Наведіть приклади комплексних чисел $(1 + i\sqrt{3})$

- Як показати, що елемент «2» належить множині натуральних чисел? ($2 \in \mathbb{N}$)
- Як показати, що елемент «-2» не належить множині натуральних чисел? ($-2 \notin \mathbb{N}$)
- Назвіть дійсні розв'язки рівняння $x^2 + 1 = 0$ (\emptyset – порожня множина)
- Як записати схематичну ілюстрацію кругів Ейлера-Венна? ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$)
- Чи можна будь-яку сукупність назвати множиною? (Відповіді учнів)

$$A = \{\text{☎, ☎, 📱, 📱}\}$$

Множина телефонів

$$B = \{\text{▲, ●, ▲, ■}\}$$

Множина фігур

$$C = \{7, 4, 8, 3\}$$

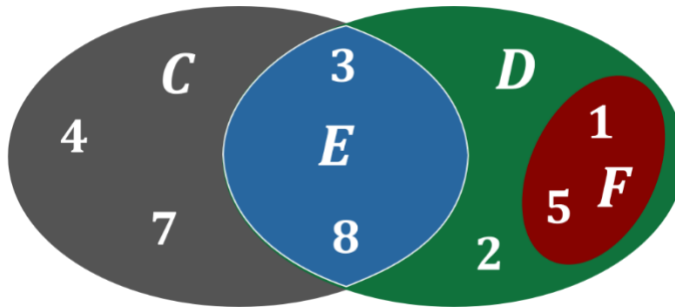
Множини цифр

$$D = \{3, 8, 5, 1, 2\}$$

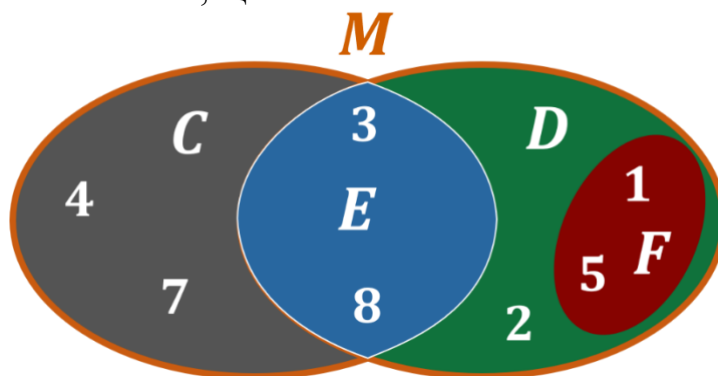
- Щойно ми говорили про приклади нескінченних множин. Можна говорити, наприклад, про сукупність телефонів, фігуру або чисел – це приклади скінченних множин



- Зобразимо множини $C = \{7, 4, 8, 3\}$, $D = \{3, 8, 5, 1, 2\}$, $E = \{3, 8\}$, $F = \{5, 1\}$ за допомогою кругів Ейлера-Венна:



- Як показати, що множина F є частиною множини D ? ($F \subset D$)
- Як показати, що множина E містить усі спільні елементи множин C і D ? ($C \cap D = E$)
- Як показати, що множина M містить кожен елементи множин C і D ?



$$(C \cup D = M)$$

- Якщо ми розглядаємо множину, у якій порядок розташування елементів має значення – така множина називається *впорядкованою*. Впорядковані множини записуються у круглих дужках. Наприклад:

Невпорядковані множини	$A = \{7, 4, 8, 3\}$ $B = \{7, 3, 4, 8\}$	$A = B$
Впорядковані множини	$C = (1, 7, 5)$ $D = (1, 5, 7)$ $E = (1, 7, 5)$	$C \neq D$ $C = E$



III. Вивчення нового матеріалу

- Правила суми та добутку

**У 9-му класу учні вже вивчали комбінаторні правила суми та добутку, тому достатньо їх лише пригадати.*

- Скількома способами можемо вибрати одну шоколадку або одне печиво?



(Так як шоколадку можна вибрати 3-ма способами а печиво 4-ма способами, то один із них можна вибрати $3 + 4 = 7$ способами)

Правило суми:

Якщо елемент множини M можна вибрати a способами, а елемент множини T - b способами, то елемент з множини M або T можна вибрати $a + b$ способами.

- Скількома способами можемо вибрати одну шоколадку і одне печиво?



(Так як можемо вибрати будь-яку одну з 3-х шоколадок то парою до неї може бути будь-яке одне з 4-х печиво, тоді можемо вибрати одну шоколадку і одне печиво $3 \cdot 4 = 12$ способами)

Правило добутку:

Якщо перший елемент пари можна вибрати a способами, а другий - b способами, то таку пару можна вибрати ab способами.

Розділ математики, що вивчає способи розв'язування подібних задач називається *комбінаторикою*, а самі задачі – *комбінаторними*.

Вибрані (або вибрані й розміщені) групи елементів називаються *сполуками*. В шкільному курсі ми будемо розглядати сполуки без повторень.



- **Факторіал**

Розглянемо задачу:

Скільки чотирицифрових чисел можна скласти із цифр 5,7,4,8, так, щоб у кожному числі всі цифри були різними?

- Скількома способами можемо вибрати першу цифру?
(4)
- Скількома способами можемо вибрати другу цифру?
(3)
- За правилом добутку, скількома способами можемо вибрати першу дві цифри?
($4 \cdot 3 = 12$)
- Скількома способами можемо вибрати третю цифру?
(2)
- За правилом добутку, скількома способами можемо вибрати перші три цифри?
($4 \cdot 3 = 12$)
- Міркуючи аналогічно, які можемо зробити висновки?

Кількість різних чотирицифрових чисел у яких жодна цифра не повторюється можна скласти $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ способами.

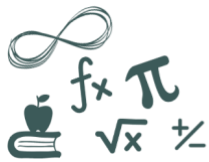
Означення

Добуток усіх послідовних натуральних чисел від 1 до n називають n – факторіалом і позначають $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$

« $n!$ » - читається як «ен факторіал»

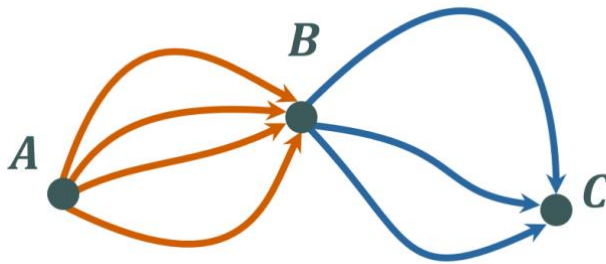
Наприклад, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

За означенням $0! = 1$ і $1! = 1$



IV. Закріплення нових знань та вмінь учнів

№1



Із міста A до міста B проходять 4 шляхи, а з міста B до міста C проходять 3 шляхи. Скількома способами можна проїхати з міста A до міста C ?

Розв'язок:

Так як дорогу від міста A до міста B можна обрати 4-ма способами, а дорогу від міста B до міста C – 3-ма способами, то за правилом добутку шлях від міста A до міста C можна подолати $4 \cdot 3 = 12$ способами.

Відповідь: 12

№2

На вершину гори прокладено 5 маршрутів. Скількома способами альпініст може піднятися на гору та спуститися з неї? Дайте відповідь на це запитання також за умови, коли підйом і спуск мають відбуватися за різними маршрутами.

Розв'язок:

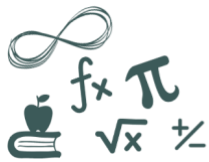
Розглянемо перший випадок, коли альпініст може спускатися тим же маршрутом, що і піднявся. Так як в цьому випадку він може піднятися 5 маршрутами та спуститися 5 маршрутами, то способів підйому та спуску існує:

$$5 \cdot 5 = 25 \text{ способів}$$

Розглянемо другий випадок, коли альпініст не може спускатися тим же маршрутом, що і піднявся. В цьому випадку альпініст може піднятися 5 способами і спуститися 4 способами, так як не може використовувати для спуску маршрут підйому. Отже способів підйому та спуску існує:

$$5 \cdot 4 = 20 \text{ способів}$$

Відповідь: 25 способів у 1-му випадку і 20 способів у 2-му випадку.



№3

Скільки чотирицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7?

Розв'язок:

Так як цифри можуть повторюватися, то для вибору кожної цифри існує 7 способів, отже для запису числа існує:

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^4 = 2401 \text{ способів}$$

Відповідь: 2401 способів.

№4

Розглядатимемо склади з двох букв, перша з яких позначає приголосний звук, а друга – голосний. Скільки таких різних складів можна скласти з букв слова:

1) Шабля

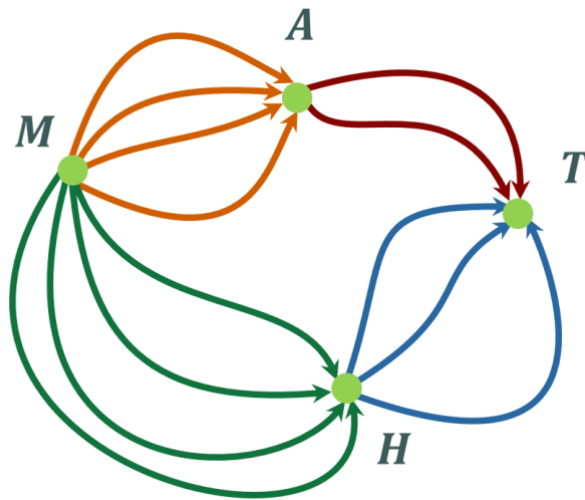
2) Шаровари

Розв'язок:

Зверніть увагу!

Для передавання на письмі шести голосних звуків використовують десять літер: а, е, и, і, о, у, я, ю, є, ї.

- 1) Так як слово «шабля» складається із 3-х різних букв, що позначають приголосний звук і 2-х різних букв, що позначають голосний звук і нам необхідно скласти склади з двох букв, на першому місці яких має стояти буква, що позначає приголосний звук, то можна скласти: $3 \cdot 2 = 6$ таких різних складів.
- 2) Так як слово «шаровари» складається із 3-х різних букв, що позначають приголосний звук і 3-х різних букв, що позначають голосний звук і нам необхідно скласти склади з двох букв, на першому місці яких має стояти буква, що позначає приголосний звук, то можна скласти: $3 \cdot 3 = 9$



На рисунку показано схему доріг, які ведуть з міста M до міста T . Скількома способами можна проїхати з міста M до міста T ?

Розв'язок:

Так як з міста M до міста T через місто A можна проїхати $4 \cdot 2 = 8$ способами, а через місто H $4 \cdot 3 = 12$ способами, то загалом до з міста M до міста T можна проїхати $8 + 12 = 20$ способами

Відповідь: 20

№6

Скільки існує трицифрових чисел, усі цифри яких парні?

Розв'язок:

Існує 5 парних цифр: 0, 2, 4, 6, 8

**Якщо діти мають сумніви, що нуль – це парне число, таке твердження досить легко довести.*

Парність нуля можна довести шляхом перевірки того, чи є він кратним 2, наприклад:

8 – парне число, так як $8 = 2 \cdot 4$

0 – парне число, так як $0 = 2 \cdot 0$

Якщо цього не достатньо, можна показати, що кожне парне число знаходиться на числовій прямій між двома непарними числами – нуль з обох боків межує з непарними числами.

- Скількома способами можемо обрати першу цифру для нашого трицифрового числа?
(Маємо 4 способи, так як не можемо поставити нуль як першу цифру числа)

Так як на перше місце трицифрового числа можемо поставити одну з 4-х цифр і на кожне наступне одну з 5 цифр, то можемо отримати: $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$ чисел.

Відповідь: 100



№7

Монету кидають 4 рази. Скільки різних послідовностей гербів і цифр можна отримати?

Розв'язок:

При кожному підкиданні монети завжди будуть можливі 2 випадки (герба або цифра), отже за 4 підкидання можливі $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$ випадків

Відповідь: 16

№8

Скільки трицифрових парних чисел можна записати за допомогою цифр 0,1,2,3,4,5,6?

Розв'язок:

Так як першу цифру можемо вибрати 6 способами (нуль не може бути першою цифрою), другу цифру можемо вибрати 7 способами а третю цифру 4 способами (так як число за умовою має бути парним) \Rightarrow кількість чисел можна записати $6 \cdot 7 \cdot 4 = 168$ способами.

Відповідь: 168

№5

Скільки існує п'ятицифрових чисел, які діляться націло на 5?

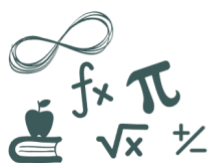
Розв'язок:

Маємо 10 цифр: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

- Нуль не може бути першою цифрою, тому для вибору першої цифри маємо 9 способів.
- Другу, третю та четверту цифру до п'ятицифрового числа можемо обрати $10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3$
- П'ятицифрове число за умовою має ділитися націло на 5, тому для вибору останньої цифри існує 2 способи: 0 або 5

Отже, існує $9 \cdot 10^3 \cdot 2 = 18000$ п'ятицифрових чисел, які діляться націло на 5

Відповідь: 18000



V. Підсумок уроку

- Що ми розуміємо під поняттям множини?
- Яка множина називається порожньою?
- Сформулюйте правило суми
- Сформулюйте правило добутку
- Що таке факторіал числа?

VI. Домашнє завдання

Опрацювати §3 п.12 опрацювати Виконати № 12.3; 12.6; 12.8; 12.10; 12.18; 12.22	Мерзляк А.Г.
Опрацювати §13, §14 (ст.125-128) опрацювати Виконати № 13.4; 13.14; 14.6; 14.8; 14.14	Істер О.С.
Опрацювати §8 (ст.106-107), опрацювати Виконати № 8.1.1; 8.1.7; 8.1.8; 8.1.9; 8.1.10	Нелін Є.П.
Опрацювати §9-10 опрацювати Виконати № 340, 348, 376, 379, 381, 389, 403	Бевз Г.П.